$2^{ème}$ façon : $f(x) = g(x)$ dans 4 points.

$f(0) = 6$ $\quad$ $f(1) = 0$

$g(0) = 6$ $\quad$ $g(1) = 0$ $\quad$ - - - etc.

Exo 2 :

Construire le polynôme de Lagrange $L_2(x)$ de la fonction donnée sous la forme : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 = x_0 \\ b = \frac{1}{6} = x_1 \\ c = \frac{1}{2} = x_2 \end{cases}$

$$L_2(x) = \overbrace{\frac{x - 1/6}{0 - 1/6} \times \frac{x - 1/2}{0 - 1/2}(0)}^{0} + \frac{x - 0}{1/6 - 0} \times \frac{x - 1/2}{1/6 - 1/2}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$+ \frac{x - 0}{1/2 - 0} \times \frac{x - 1/6}{1/2 - 1/6}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)$$

$$L_2(x) = \frac{x}{1/6} \times \frac{x - 1/2}{-1/3}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{x}{1/2} \times \frac{x - 1/6}{1/3}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}\,\frac{x^2 - 1/2\,x}{-1/18} + \frac{1}{2}\,\frac{x^2 - 1/6\,x}{1/6}$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - 1/2\,x + x^2 - 1/6\,x}{-\frac{1}{18} + \frac{1}{6}}\right)$$

faute de calcul mais la méthode correcte

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, f(x_i)$$

$$\text{où } L_i(x) = \prod_{j=0}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad j \neq i.$$

degré $n \Rightarrow (n+1)$ point d'interpolation.

3

Degré 1 :

$$P_1(x) = \sum_{i=0}^{1} L_i(x)\, f(x_i) \quad \begin{pmatrix} i=0 \\ i=1 \end{pmatrix}$$

- $$L_0(x) = \prod_{j=0}^{1} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} \quad \begin{matrix} j \neq i & j = 1 \\ i = 0 & j \neq 0 \end{matrix}$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

- $$L_1(x) = \prod_{j=0}^{1} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = L_1(x)$$

$$\begin{pmatrix} j \neq i & \\ i = 1 & j \neq 1 \\ & j = 0 \end{pmatrix}$$

Donc le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 1 :

$$P_1(x) = L_0(x) \cdot f(x_0) + L_1(x) \cdot f(x_1)$$

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(2,4) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(2,6).$$

$$f(2,4) < f(2,5) < f(2,6)$$

Les plus proches

$$P_1(x) = 0{,}5104147\left(\frac{x-2{,}6}{-0{,}2}\right) + 0{,}4813306\left(\frac{x-\ldots}{0{,}\ldots}\right.$$

$$\begin{cases} x_0 = 2{,}4 \\ x_1 = 2{,}6 \end{cases}$$ $x = 2{,}5$ on le remplac dans $P_1(x)$

on aura : $P_1(x) = \boxed{P_1(2{,}5) = 0{,}495875.}$

Degré 02 :

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x)\, f(x_i) \quad \begin{pmatrix} i=0 \\ i=1 \\ i=2 \end{pmatrix}$$

$$L_0(x) = \prod_{j=0}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad \begin{matrix} i=0 \\ j \neq i \end{matrix} \qquad \begin{matrix} j=1 \\ j=2 \end{matrix}$$

(4)

$$\boxed{L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \times \frac{x - x_2}{x_0 - x_2}}$$

$$L_1(x) = \prod_{j=0}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad \begin{matrix} i=1 \\ j \neq i \end{matrix} \qquad \begin{matrix} j=0 \\ j=2 \end{matrix}$$

$$\boxed{L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \times \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}}$$

$$L_2(x) = \prod_{j=0}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad \begin{matrix} i=2 \\ j \neq i \end{matrix} \qquad \begin{matrix} j=0 \\ j=1 \end{matrix}$$

$$\boxed{L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \times \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

Donc le polynôme d'interpolation de lagrange de degré 2 =

$$P_2(x) = L_0(x) \cdot f(x_0) + L_1(x) \cdot f(x_1) + L_2(x) \cdot f(x_2)$$

$$P_2(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \cdot f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

$$\cdot f(x_1) + \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot f(x_2)$$

$$\begin{cases} x_0 = 2,2 \\ x_1 = 2,4 \\ x_2 = 2,6 \end{cases}$$

$x = 2,5$ on le remplace dans $P_2(x)$.

Directement le ~~ce~~ résultat sera :

$$P_2(2,5) = 0,4982122$$

5

Degré 03 :

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} L_i(x) \, f(x_i)$$

$i = 0$
$i = 1$
$i = 2$
$i = 3$

$$L_0(x) = \prod_{j=0}^{3} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad i = 0 \quad j \neq i$$

$j = 1$
$j = 2$
$j = 3$.

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \times \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \times \frac{x - x_3}{x_0 - x_3}$$

On remplace et on aura comme résultat :

$$P_3(2,5) = 0,498062.$$

(1)

Degré 4 :

$$P_4(x) = \sum_{i=0}^{4} L_i(x) \cdot f(x_i)$$

$i=0$ $i=1$
$i=2$ $i=3$
$i=4$

$$L_i(x) = \prod_{j=0}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (j \neq i)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \times \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \times \frac{x - x_3}{x_0 - x_3} \times \frac{x - x_4}{x_0 - x_4}$$

$i=0$
$j=1$ $j=2$
$j=3$ $j=4$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \times \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \times \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} \times \frac{x - x_4}{x_1 - x_4}$$

$i=1$
$j=0$ $j=2$
$j=3$ $j=4$

$$L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \times \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \times \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} \times \frac{x - x_4}{x_1 - x_4}$$

$i=2$
$j=0$ $j=1$
$j=3$ $j=4$

Exo4

Soit les points d'interpolation
$(4;1)$, $(6;3)$, $(8;8)$ et $(10;20)$.

- Trouver le polynôme de Newton $P_3(x)$.
- Calculer $P_3(7)$.

(9)

Polynôme d'interpolation de Newton de degré n: $n=4$ $i=0$ $i=1$ $i=2$ $i=3$

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x-x_{n-1}).$$

x_i	y_i	Δy_i
4	1	
6	3	$\Delta y_0 = 3-1=2$
8	8	$\Delta y_1 = 8-3=5$
10	20	$\Delta y_2 = 20-8=12$

$$\boxed{\Delta y_i = y_i - y_{i-1}}$$

$$P_3(x) = \frac{1}{24}\left(240 + 142x - 27x^2 + 2x^3\right).$$

- Calculer $P_3(7)$:

$$P_3(7) = \frac{1}{24}\left(240 + 142(7) - 27(7)^2 + 2(7)^3\right)$$

$$P_3(7) = \frac{39}{8}$$

11

Exo 5

Soit la fonction $f(x) = \exp(x)$ donnée par le tableau :

x_i	3,50	3,55	3,60	3,65	3,70
y_i	33,15	34,813	36,598	38,475	40,447

1. En utilisant la formule de Newton, composer le polynôme d'interpolation $P_3(x)$.
2. Calculer $P_3(3,62)$

$\Rightarrow P_3(x) = \frac{20}{3} x^3 + 53,6 x^2 + 175,08 x - 167,75.$

Calculer $P_3(3,62)$

on remplace x par 3,62 et on trouve :

~~$P_3(x)$~~ $\boxed{P_3(3,62) = 37,33748.}$ Estimation théorique

C'est une valeur approchée !

$f(x) = \exp(x)$

$\boxed{f(3,62) = \exp(3,62) \simeq 37,33748}$...

Estimer le résultat obtenu :

$$R(x) = \frac{1}{(n+1)!} L(x) \cdot f^{(n+1)}(\xi x) \quad \left\{ \begin{array}{l} n=3 \\ i=0 \\ i=1 \\ i=2 \\ i=3 \\ i=4 \end{array} \right.$$

où $L(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$ L'erreur

après les calculs.

$$\boxed{R(x) = 672 \cdot 10^{-7} < 0,5 \cdot 10^{-3}}$$

Estimation par expérience. (pratique).

B

l'estimation théorique est plus exacte et meilleure que l'estimation pratique.

Les détails de l'estimation pratique sont dans l'exercice suivant (exo 6) ...

$n=2 \quad P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x)\, L_i(x)$

$$\text{où } L_i(x) = \prod_{j=0}^{2} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad (i \neq j).$$

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} +$$

$$f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P_2(x) = 0{,}5207843\,(12{,}5x^2 - 62{,}5x + 78) + 0{,}5104147\,(-25x^2 + 120x - 143) + 0{,}4813306\,(12{,}5x^2 - 17{,}5x + 166).$$ fautes de calcul

$$\Rightarrow \cancel{P_2(x) = -0{,}2339312\,x^2 + 1{,}0242357x + 0{,}600307}.$$

15

A la fin notre $P_2(x)$ sera :

$$P_2(x) = 0{,}074025x^2 - 9{,}291938x + 1{,}93558.$$

$f(1{,}03) = 3{,}0531617.$

$P_2(1{,}03) = 3{,}0531379$

Donc l'erreur absolue :

$E_A = |3{,}0531617 - 3{,}0531379|$ $\quad E_A = |f_{23} - P_2|$

$$E_A = 3{,}2 \cdot 10^{-5}$$ erreur actuelle (théorique)

- Estimer le résultat.

Série 02 :

Exercice 01 : $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ $\quad \int_a^b$

1. valeur exacte de I :

$I_e = \text{Arctan}\Big]_0^1 = \text{arctan} 1 = 0,7850$

2. Valeur approchée de I :

Méthode des Trapèzes pour $n = 8$: (17)

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{8} = \frac{1}{8}$ $\quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ n = 8 \end{cases}$

$I_t = h\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + \text{------} + y_7 + \frac{y_n}{2}\right]$ / $y_i = f(x_i)$ $\quad i = 0, \dots, n$

$x_i = x_0 + ih = \underbrace{a + ih = ih = \frac{i}{n}}_{}$

pour $a = 0$, $b = 1$, $n = 8$.

$i : 0 \to 8$

x_i	$y_i = f(x_i)$
$x_0 = 0$	$y_0 = 1$
$x_1 = 1/8$	$y_1 = 0,984$
$x_2 = 1/4$	$y_2 = 0,941$
$x_3 = 3/8$	$y_3 = 0,875$
$x_4 = 1/2$	$y_4 = 0,8$
$x_5 = 5/8$	$y_5 = 0,719$
$x_6 = 3/4$	$y_6 = 0,64$
$x_7 = 7/8$	$y_7 = 0,566$
$x_8 = 1$	$y_8 = 0,5$

On trouve donc :

$I_t = 0,78.$

C'est une autre méthode pour calculer le max $|f''(x)| = M$

On trouve les points critiques :

$$G(x) = \frac{12x^4 - 6x}{(1+x^3)^3}$$

on calcule $G'(x)$:

$$G'(x) = -6\left(10(x^3)^2 - 16x^3 + 1\right).$$

$G'(x) = 0 \Rightarrow -6\left(10(x^3)^2 - 16x^3 + 1\right) = 0.$

on met $y = x^3$.

$\Rightarrow -6\left(10y^2 - 16y + 1\right) = 0.$ (21)

$\Rightarrow 10y^2 - 16y + 1 = 0$

$\Delta' = b'^2 - ac = 64 - 10 = 54.$

$y_1 = \frac{8 - \sqrt{54}}{10}$ $\quad$ $y_2 = \frac{8 + \sqrt{54}}{10}$

$x_1 = \sqrt[3]{\frac{8 - \sqrt{54}}{10}}$ $\quad$ $x_2 = \sqrt[3]{\frac{8 + \sqrt{54}}{10}}$

$x_1 \notin [0,1]$ $\quad$ $x_2 = 0,39 \in [0,1]$

$\Rightarrow G'(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{x = 0,39}$. le point critique.

$$\begin{cases} f''(0) = 0. \\ f''(1) = -0,75 \\ f''(0,39) = -1,584 \end{cases}$$

$\max = |f''(0,39)| = |-1,584|$

$\max = 1,584 = M$

Calculons l'erreur comise:

$f(x) = \frac{1}{1+x}$

$f^4(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$

D'où $\max |f^4(x)| = 24 \quad x \in [0,1]$.

$|E_{10}(f)| \leq \frac{1 \times (0,1)^4 \times 24}{180} < 0,5 \cdot 10^{-4}$

$E_S \leq \frac{(b-a)\, h^4 M^4}{180}$ L'erreur de simpson.

23

Exercice 05:

$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$

1) $\varepsilon = 0,001$. on trouve n.

Erreur trapèze $R_t \leq \left(\frac{b-a}{12}\right) M^2 \cdot h^2 < \varepsilon$

$M^2 = \max |f''(x)| \quad x \in [0,1]$.

on trouve $N > \sqrt{\frac{(b-a)^3 M^2}{12\varepsilon}}$

$a = 0$
$b = 1$
$f(x) = \frac{1}{1+x}$
$\varepsilon = 0,001$

après calcul on trouve :

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad M_2 = 2. \Rightarrow n > 11{,}89 \Rightarrow n = 12.$$

$h = \frac{1}{12}$.

Méthode de trapèzes :

$$I_t = h\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + \text{-----} + y_{11} + \frac{y_{12}}{2}\right].$$

$x_i = x_a + ih \qquad a = x_0.$

on trouve $I_t = 0{,}0935$

2) Simpson $|R_s| \leq \frac{(b-a)}{180} h^4 M_4$ Erreur simpson

$|R_s| < \varepsilon$.

on trouve n :

24

$$n > \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{180\,\varepsilon} M_4}.$$

$\Rightarrow n = 12.$ (on choisi le même n).

Série n°3. Equations non-linéaires

Exercice 01 :

Séparer les racines de l'équation

$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0.$

Exercice 02 :

même question pour:

$f(x) = x^4 + 4^x + 2 = 0.$

Exercice 03 :

Déterminer le nombre de racines réelles de l'équation donnée:

$f(x) = x + 2 \cdot e^x = 0.$

25

Solutions :

Exercice 01 :

$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$

$f(x) = x^3 - (6x - 2) = 0$

$f_1(x) - f_2(x) = 0$

Tracer f_1 et f_2 et trouver les racines (méthode graphique).

Méthode demandée directe :
on choisit un intervall $[a, b]$ tel que $f(a) \times f(b) < 0$

on prend $[-3,3]$
$f(-3) < 0$
$f(3) > 0$
} d'après la méthode graphique

d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$\exists\, x^* \in [-3,3]$ tq $f(x^*)=0$.

On va voir combien y a-t-il exactement de racines ?

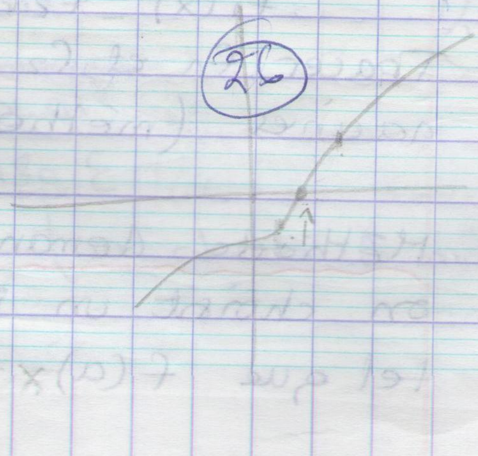
x	$f(x)$
$-\infty$	$-$
-3	$-$
~~-2~~	~~0~~
-1	$+$
0	$+$
1	$-$
~~2~~	~~0~~
3	$+$
$+\infty$	$+$

$\exists\, x^* \in$ à 3 intervalles :
$(-3,-1)$, $(0,1)$, $(1,3)$

tel que $f(x^*)=0$.

mon équation admet 3 racines.

26



Exercice 02 :

$f(x) = x^4 + 4x + 2 = 0$

$f(x) = x^4 - (4x + 2) = 0$

$= f_1(x) - f_2(x) = 0.$

1) méthode graphique.

2) méthode directe :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 4x^3 + 4 = 0.$

$f'(x) = 4(x^3 + 1) = 0 \quad x^3 + 1 = 0 \quad x^3 = -1$

$\Rightarrow x = -1.$

27

$f(-1) < 0.$

On a trouvé un point $(x = -1)$ où la dérivée sera nulle. donc y a pas d'unicité.

sur l'intervalle $]-\infty, -1]$.

$f(-\infty) > 0.$

$f(-1) < 0$

sur l'intervalle $[-2, +\infty[$

$f(-1) < 0$

$f(+\infty) > 0$

d'après le th des valeurs intermédiaires

$\exists x^* \in]-\infty, -2], [-2, +\infty[$

$f(x^*) = 0$

Donc l'équation admet deux racines

Exercice 03 :

$f(x) = x + 2 . e^x = 0.$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$

$f'(x) = 1 + 2e^x = 0.$

$\nexists$ $2e^x = -1$ $e^x = -\frac{1}{2}$

toujours $f'(x) > 0.$ $\forall x \in \mathbb{R}.$

On a une unicité sur tout l'intervalle $\mathbb{R}$.

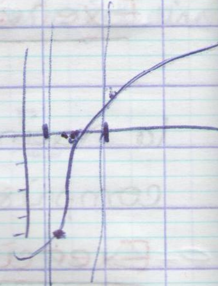
28

Solution

Exercice 01 :

Construction intervalles de plus en plus petits dont la racine x_0

Trouver l'intervalle $[a, b]$:



$$f(x) = x^3 + 2x - 7 = 0$$

Séparation des racines

$$= x^3 - (7 - 2x) = 0$$

$$= f_1(x) - f_2(x) = 0$$

$\Longrightarrow$ Tracer le graphe et trouver l'intervalle $\alpha \in [a, b]$.

$$\boxed{\alpha \in [1, 2]}$$

$f(1) = -4 < 0$

$f(2) > 0$

$\boxed{f(1) \times f(2) < 0}$

$$\boxed{\exists x \in [1, 2] \ / \ f(x) = 0.}$$

30

On calcule dérivée

$f'(x) = 3x^2 + 2 \neq 0 \quad \forall x \in [1, 2].$

d'où l'unicité

Appliquant la méthode de dichotomie.

- $I = [a, b] = [1, 2]$

- $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2} \quad k = 1, 2, \ldots k_{max}$

~~xxxxx~~ $x_7 - a_7$

$x = 1,57$ car $1,57 - 1,566 = 0,004 < \varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-2}$

$I_k = [a_k, b_k]$

$\underbrace{X_{k+1}}_{=n} = \frac{a_k + b_k}{2}$

Exercice 05 :

$f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$

$I =]0, 1[$

$e = 0,5 \cdot 10^{-1}$

$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 1 > 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f(0) \times f(1) < 0 \\ \exists x \in]0,1[\;/\; f(x) = 0. \end{array}$

On calcule dérivée de f.

$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 1$

32

$e = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} = 0,5 \cdot 10^{-1}$ $\boxed{n = 5}$

n	a_n	b_n	$b_n - a_n$	$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_n)$
0	0	1	1	$x_1 = 0,5$	$-1,19$
1	0,5	1	0,5	$x_2 = 0,75$	$-0,69$
2	0,75	1	0,25	$x_3 = 0,88$	$-0,366$
3	0,88	1	0,125	$x_4 = 0,94$	$+0,212$
4	0,88 a_4	0,94	0,06	$x_5 = 0,91$	0,273

$x_4 - a_4$

$x = 0{,}94 - 0{,}88 = 0{,}03 < 0{,}5 \cdot 10^{-1}$

La racine se trouve dans $[0{,}88 ; 0{,}94]$.

Pour l'améliorer on prend

$$C = \frac{0{,}88 + 0{,}94}{2} \qquad C = 0{,}895$$

Exercice 06 :

$x_0 = 1{,}7$

$f(x) = x^4 - 2x - 4 = 0$

$\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$

Trouver racine positive (Newton).

Algorithme de Newtion

$$\begin{cases} x_0 \text{ domaine initiale} \\ x_{n+1} = x_n \cdot \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

33

Test d'arrêt

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$$

$x_1 = x_0 \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1,646 \quad |x_1 - x_0| > \varepsilon$

$x_2 = x_1 \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,643 \quad |x_2 - x_1| > \varepsilon$

$x_3 = x_2 \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1,6427 \quad |x_3 - x_2| < \varepsilon$

Donc : $x \simeq x_3 = 1,6427$

racine positive

Exercice 07 :

34

- $x_0 = -11$
- $f(x) = x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$
- $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h(n) = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1} = h(x) + x_n$
0	-11	3453	-5186	0,7	$-10,3 = x_1$
1	$-10,3$	134,3	-4234	0,03	$-10,27 = x_2$
2	$-10,27$	37,8	-4196	0,009	$-10,261 = x_3$
3	$-10,261$	0,2	$-4184,88$	0,00004	$-10,26096 = x_4$

$|x_{n+1} - x_n| = |x_4 - x_3| = 0,00004 < 0,5 \cdot 10^{-3}$

A 5 chiffres significatifs exactes on trouve :

$$x = -10,261$$

35

Exercice 08 :

$x_0 = 2$ $\quad f(x) = x^4 - 8x + 1 = 0.$

$$I = [1,6 \; ; 2]$$

Méthode de Newton 2 fois $n = 2$ $\begin{pmatrix} n=0 \\ n=1 \end{pmatrix}$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

On trouve pour $n=0$ $\quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$$x_1 = 1,96$$

pour $n = 1$ $\quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

$$x_2 = 1,956$$

Erreur :

$$|c - x_1| \leq |c - x_2| \leq 0,004 < 0,5 \cdot 10^{-2}$$

$$C = 1,96$$