Série N°1 (Probabilité)

Exo 1 :

Déterminer si l'une des expériences décrites ci-dessous correspond à l'observation d'un phénomène aléatoire : On ne connait pas le résultat par avance.

a) Lancer 4 fois une pièce de monnaie dont les deux faces sont distinctes et observer la face supérieure après chaque lancée oui

b) Chaque 5 novembre à 13h, observer le niveau d'eau de Sybousse au niveau de l'imbouchure de Joanoville. oui

c) Mesurer la durée d'un match de football non. (pas aléatoire)

d) Calculer le nombre de minutes d'un mois non (pas aléatoire)

Exo 2 :

On lance 3 dés et on observe le nombre de ponts sur la face supérieure de chaque dé

. Présenter les évènements suivants par des sous ensembles de l'espace echantillon.

a) le nombre de ponts sur chaque face est inférieur à 3.

$\Omega_1 = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1$

$(2,1,2)$, $(2,2,2)$, $(2,2,2)\}$.

b) Le nombre total est égale à 18.

$\Omega_2 = \{(6,6,6)\}$

c) Sur chaque face, il y'a un nombre impair inférieur à 3.

$\Omega_3 = \{(1,1,1)\}$

d) Le nombre total est supérieur à 18.

$\Omega_4 = \phi$.

Exo3 :

Soit deux évènements A et B.

. Donner une interprétation algébrique des évènements suivants, dont on fera les diagrammes de venn.

a) A est réalisé mais pas B.

$(A \cap \overline{B}) = A / B = A - B$.

b) A ou B se réalisent mais pas en même temps.

$(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = A \Delta B$
$= (A - B) \cup (B - A)$.

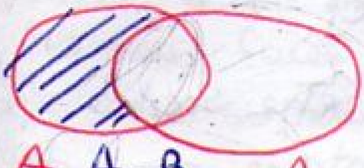
c) Ni A ni B se réalisent.

$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

Exo 4 :

Soit un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

- montrer que $\mathcal{A}$ est stable pour les opérations $-$ et Δ qui sont représentées sur les figures suivantes :



$\mathcal{A}$ est stable si

$$\begin{cases} \forall\ A \in \mathcal{A} & \overline{A} \in \mathcal{A} \\ \forall\ A, B \in \mathcal{A} & A \cup B \in \mathcal{A} \end{cases}$$

1) $A - B = A \cap \overline{B} = \overline{\overline{A} \cup B}$ (قانون).

$\overline{A} \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \cup B \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{\overline{A} \cup B} \in \mathcal{A}$

$(-)$ est stable par passage au complémentaire et pour l'union.

2) $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

d'après (1) $(A - B) \in \mathcal{A}$ et $(B - A) \in \mathcal{A}$

donc leur union aussi $\in \mathcal{A}$.

- ie : $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) \in \mathcal{A}$.

Exo5:

Soit Ω un ensemble avec $A \subset \Omega$.

- Quelle est la tribu engendrée par A?

Solution:

$T(A) = \{ \emptyset, A, \overline{A}, \Omega \}$.

elle contient A, et doit être stable par passage au complémentaire, donc elle contient $\overline{A}$, $\emptyset$ et Ω.

(Union de deux ensembles nous donne Ω) « stable par union ».

Série N° 2 (Probabilité)

Exo 1 :

Si $P(A)=0{,}3$; $P(B)=0{,}2$

$P(A\cap B)=0{,}1$

- Déterminer les probabilités des évènements suivants :

1) Au moin un des évènements A ou B se réalise.

2) Aucun des évènements A, B ne se réalise.

3) A ne se réalise pas mais B se réalise.

4) Exactement un des deux évènements A, B se réalise.

Solution :

1) $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$= 0{,}3+0{,}2-0{,}1$

$\boxed{P(A\cup B)=0{,}4}$

2) $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B})$

$= 1-P(A\cup B)$

$= 1-0{,}4$

$\boxed{P(\overline{A}\cap\overline{B})=0{,}6}$

3) $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ ③

$= 0{,}2 - 0{,}1$.

$\boxed{P(\bar{A} \cap B) = 0{,}1}$

4) $P(\bar{A} \cap B) \cup P(\bar{B} \cap A)$.

$= \left(P(B) - P(A \cap B)\right) + \left(P(A) - P(A \cap B)\right)$

$= P(A) + P(B) - 2\,P(A \cap B)$

$= 0{,}3 + 0{,}2 - 2(0{,}1)$

$\boxed{P(\bar{A} \cap B) \cup P(\bar{B} \cap A) = 0{,}3}$

Exo 2 :

Dans une ~~course~~ où il n'y a pas d'exaequo les chances pour que A gagne sont 2 contre 3, $\frac{2}{3}$ celles de B sont 1 contre 4.

- Quelle est la probabilité que A ou B gagne la course ?

Solution :

$P(A \cup B) = ?$ — il n'y a pas d'exaequo donc : $P(A \cap B) = 0$

$P(A) = \frac{2}{5}$ (2+3)

$P(B) = \frac{1}{5}$ (1+4)

5 est le nombre total des joueurs

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

Exo03 :

Si $P(A) = \frac{2}{3}$ et $P(B) = \frac{1}{2}$.

Les événements A, B peuvent-ils être mutuellement exclusifs ?

- mutuellement exclusif = ne peuvent pas se réaliser les deux en même temps.

c.à.d $P(A \cap B) = 0$.

si la réalisation de l'un est $P(A)$ alors la réalisation de l'autre est $P(\overline{A})$.

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$ {3}

$P(A) + P(B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6} \neq 1$.

les évènements ne sont pas mutuellement exclusifs.

Exo04 :

Pour A, B et C.

montrer que :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Solution :

on pose $B \cup C = M$.

$$P(A \cup M) = P(A) + P(M) - P(A \cap M).$$
$$= P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C))$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - [P(A \cap B) \cup P(A \cap C)]$$

$P(A) \cup P(B) = P(A) + P(B) + P(A \cap B)$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Exo 058

Supposons que : $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = P(C) = \frac{1}{6}$ où A, B et C sont mutuellement exclusifs.

- Trouver les probabilités suivantes :

1) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ 2) $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$.

Solution :

1) $$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - [P(A) + P(B)]$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}.$$

2) $$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C})$$
$$= 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - P(A) - P(B) - P(C)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Série 03

Exercice 01 :

la probabilité de réussir en mathématique $P(M)=0,6$, la probabilité de réussir en physique $P(P)=0,2$, la probabilité de réussir en mathématique et physique $P(M\cap P)=0,1$

- Quelle est la probabilité de :

1) Réussir en math ou physique.
2) Réussir en math et pas physique.
3) Ne pas réussir en math et physique.

Solution :

$P(M)=0,6 \qquad P(P)=0,2 \qquad P(M\cap P)=0,1$.

1) $P(M\cup P) = P(M) + P(P) - P(M\cap P)$

$= 0,6 + 0,2 - 0,1$

$= \boxed{0,7}$

2) $P(M\cap \overline{P}) = P(M) - P(M\cap P)$

$= 0,6 - 0,1$

$= \boxed{0,5}$

3) $P(\overline{M\cap P}) = P(\overline{M\cup P}) = 1 - P(M\cup P)$

$= 1 - 0,1$

$= \boxed{0,9}$

Exercice 2 :

Si on rajoute à l'exo précédant l'évènement C et les probabilités : $\begin{cases} P(C) = 0,2 \\ P(M \cap C) = 0,1 \\ P(P \cap C) = 0,1 \\ P(M \cap P \cap C) = 0,3 \end{cases}$

- Est-ce que $\Omega = M \cup P \cup C$?
- Justifier dans le cas de l'indépendance des évènements M, P et C.
  et de la non dépendance.

Solution :

$\Omega = M \cup P \cup C$ si $\Omega = 1$ (Somme des prob)

- cas d'indépendance :

$P(M \cup P \cup C) = P(M) + P(P) + P(C)$
$= 0,6 + 0,2 + 0,2$

$\boxed{P(M \cup P \cup C) = 1}$ $\Omega = M \cup P \cup C$

Car $P(M \cup P \cup C) = P(\Omega) = 1$.

- cas de non indépendance :

$P(M \cup P \cup C) = P(M) + P(P) + P(C) - P(M \cap P) - P(M \cap C) - P(P \cap C) + P(M \cap P \cap C)$

$= 0,6 + 0,2 + 0,2 - 0,1 - 0,1 - 0,1 + 0,3 = 1$

~~P(M∪P∪C) = P(Ω) = 1~~

~~M∪P∪C = Ω~~.

$(M\cup P\cup C)\setminus(M\cap P)\setminus(M\cap C)\setminus(P\cap C)\cup P(M\cap P\cap C)$
$=\Omega$

Exercice 03 :

On lance un dé et on définit la probabilité associée à chaque face comme étant ~~prob~~ proportionelle au nombre de points sur la face.

- Quelle est la mesure de probabilité ?

Solution :

prob proportionelle = nbre d'apparition de la face X nombre appari

$P(\omega) = k.\omega$ pour chaque $\omega \in [\![\Omega$ et $k\mathbb{R}^+$

il faut trouver k :

Pour déterminer le nombre k, on utilise la relation :

$$P(\Omega) = 1 = \sum_{i=1}^{6} P(\omega_i) = k.\sum_{i=1}^{6} \omega_i$$

$$P(\Omega) = k\,(1+2+3+4+5+6).$$

$$P(\Omega) = k.21 = 1 \text{ Donc } k = \frac{1}{21}$$

La mesure de probabilité :

ω	1	2	3	4	5	6	
$P(\omega)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$3/21$	$4/21$	$5/21$	$6/21$	

Exercice 04 :

Si $P(A) = a$ et $P(B) = 1 - \frac{3}{2} a$.

- Les événements A et B sont-ils mutuellement exclusifs?

Solution:

non! car $P(A) + P(B) = a + 1 - \frac{3}{2} a$

$$P(A) + P(B) = \frac{5}{2} a + 1 \neq 1. \quad (a \neq 0)$$

Exercice 05 :

Soit l'espace échantillon $\Omega = \{0, 1, 2, ...\}$.
Comme Ω est discret, on définit
$P(\omega) = \frac{e^{-1}}{\omega!}$ pour $\omega \in \Omega$.

1. Montrer que P est une mesure de prob.
2. Calculer $P(A) = P[\{0, 1\}]$.

Solution:

1. discret = nombres / continu = intervalles.

pour être une mesure de prob : - toujours + (positive) et c'est le cas $P(\omega) \geq 0$.

et $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1 = \sum_{\omega=0}^{\infty} \frac{e^{-1}}{\omega!} = e^{-1} \underbrace{\sum_{\omega=0}^{\infty} \frac{1}{\omega!}}_{e^{1}}$

$= e^{-1} \cdot e^{1} = e^{0} = 1$ (vérifiée

2. $P(A) = P(0) + P(1) = \frac{e^{-1}}{0!} + \frac{e^{-1}}{1!} = 2e^{-1}$

$$\boxed{= 0,736}$$

Exercice 06 :

Soient A et B deux évènements indépendants

- Montrer que si $A \subset B$ alors

$$P(B) = 1 \text{ ou } P(A) = 0.$$

Solution :

$$P(A \cap B) = \underbrace{P(A) \cdot P(B)}_{\text{car indépendants}} = \underbrace{P(A)}_{\text{car } A \subset B}$$

$$\Rightarrow P(A) \cdot P(B) = P(A).$$

$$\Rightarrow P(A) \cdot P(B) - P(A) = 0.$$

$$\Rightarrow P(A)\,[P(B) - 1] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A) = 0}$$

ou $P(B) - 1 = 0$

$$\boxed{P(B) = 1}$$

Exercice 07 :

Deux évènements disjoints peuvent-ils être indépendants ?

Solution :

disjoints $P(A \cap B) = \emptyset = 0$

indépendants $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$.

Donc A et B disjoints et indépendants si :

$P(A) \cdot P(B) = 0$

Donc il suffit et il faut qu'au moins l'un des deux évènements soit de probabilité nulle.

Série 4

Exercice 01 :

Calculer les moyènes arithmétique, géometrique, ~~statistique~~ harmonique et quadratique de la variable statistique discrète $x = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Solution :

1) Moyène arithmétique

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} x_i n_i$$

2) Moyène quadratique

$$q = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 n_i}{n}}$$

3) Moyène géométrique

$$g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i^{n_i}}$$

4) Moyène harmonique

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{x_i} \quad / n = \sum n_i$$

$x = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Pour résoudre cet exercice, nous allons utiliser le tableau suivant :

x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$	$x_i^{n_i}$	n_i/x_i
1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	2	1/2
3	1	3	9	3	1/3
4	1	4	16	4	1/4
5	1	5	25	5	1/5
Somme	5	15	55	~~15~~	137/60

1) Moyene arithmétique

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i n_i = \frac{1}{5}(15) = \quad \boxed{\bar{x} = 3}$$

2) Moyene quadratique

$$q = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 n_i}{n}} = \sqrt{\frac{55}{5}} \quad \boxed{q = \sqrt{11}}$$

3) Moyene géometrique

$$g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i^{n_i}} \qquad g = \sqrt[5]{120} = (1 \times 2 \times 3 \times$$

4) Moyene harmonique

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{x_i} = \frac{1}{5} \times \frac{137}{60} = \frac{137}{300}$$

$$\boxed{h = \frac{300}{137}}$$

Exercice 02;

Calculer l'écart ~~statistique~~ arithmétique moyen, l'écart quadratique moyen et la variance de l'exercice 01.

Solution: $\bar{x} = 3$

x_i	n_i	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert n_i$	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$	
1	1	2	4	
2	1	1	1	
3	1	0	0	
4	1	1	1	
5	1	2	4	
Σ	5	6	10	

1) Ecart arithmétique moyen

$$e = \frac{\Sigma \lvert x_i - \bar{x}\rvert n_i}{n}$$

$$\boxed{e = \frac{6}{5}}$$

2) Ecart quadratique moyen

moyen = (l'écart-type)

$$\delta = \sqrt{\delta^2} \Longrightarrow \boxed{\delta = \sqrt{2}}$$

3) Variance

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|^2 n_i}{n}$$

$$\delta^2 = \frac{10}{5} \qquad \boxed{\delta^2 = 2}$$

Exercice 03:-

Exprimer les moments centrés d'ordre 2, 3 et 4 (μ_2, μ_3, μ_4) à partir des moments simples de même ordre ($m1, m2, m3, m4$).

Solution: moyenes qu'on a calculé arith, geo, quadra, harmo

1) $\mu_2 = \sum_{i=2}^{n} (x_i - m1)^2 \cdot f_i$ (m1 moyene arithmétique)

$f_i = \frac{n_i}{\sum n_i}$ (fréquence)

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2x_i \underbrace{m1}_{const} + m_1^2) f_i$$

$$\mu_2 = \sum x_i^2 \cdot f_i - 2m1 \cdot \sum x_i f_i + m_1^2 \sum f_i$$

on remplace f_i par $\frac{n_i}{n}$.

$$\mu_2 = \underbrace{\sum \frac{x_i^2 n_i}{n}}_{m^2} - 2m1 \underbrace{\sum \frac{x_i n_i}{n}}_{m1} + m_1^2 \overbrace{\sum \frac{n_i}{n}}^{\text{toujours} = 1}$$

$$\mu_2 = m_2^2 - 2m1^2 + m_1^2$$

$$\boxed{\mu_2 = m_2^2 - m_1^2}$$

2) $\mu_3 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m1)^3 \, f_i \;/\; f_i = \frac{n_i}{n}$

$\boxed{\mu_3 = m3 - 3m1\, m2 + 2m1^3}$ directement

3) $\mu_4 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m1)^4 . \, f_i \;/\; f_i = \frac{n_i}{n}$

$\boxed{\mu_4 = m4 - 4\, m2\, m3 + 6\, m2^2 m_1^2 - 3\, m1^4}$

Exercice 04 :

Calculer les coefficients d'asymétrie et d'applatissement de l'exo1.

Solution :

x_i	n_i	f_i	$(x_i-\bar{x})^2 f_i$	$(x_i-\bar{x})^3 f_i$	$(x_i-\bar{x})^4 f_i$
1	1	1/5	4/5	-8/5	16/5
2	1	1/5	1/5	-1/5	1/5
3	1	1/5	0	0	0
4	1	1/5	1/5	1/5	1/5
5	1	1/5	4/5	8/5	16/5
Σ	5	1	2	0	34/5

$\mu_2 = 2 = \sigma^2$

$\mu_3 = 0$

$\mu_4 = \frac{34}{5}$

Le coef d'asymétrie

$\delta = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma . \sigma^2}$

$\delta = \frac{0}{2\sqrt{2}}$ $\boxed{\delta = 0}$

Le cof d'applotissement

$$a = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{34/5}{4}$$

$$\boxed{a = \frac{34}{20}}$$