Série de Travaux dirigés N°1 : Les systèmes formels

1. Le système MIU
   - Prouver que MUIUI est un théorème
   - UM est – il un théorème ?
   - Et MU ?

2. Le système formel p-q

S={ p, / , q}
A= pq
R :

   a) x → / x /
   b) xpy → xp/y/

(x et y sont des mots du système)

Peut – on dériver les chaînes : // p / q /// ; / p // q/ ; //////p /// q /////////

3. Le système des <feux tricolores>

Soit le système des <feux tricolores> définit par :
S ={v, r, v&o, o}
A = r
R1: α v → α v o
R2: α o → α o r
R3: α r → α r v&o
R4: α r → α r v
R5: α v&o → α v&o v
R6: α v&o → αv&o r

Peut – on démonter ?
a) r v&o v o r
b) r v o r v&o v o r v o r v&o r
c) rvr

4. On a un système formel compose :

Du vocabulaire {A, B, C, D},
Des axiomes D et DD,
Des règles de production :

   a) ajouter C à la fin d'une chaîne quelconque
   b) ajouter un A au début et à la fin d'une chaîne quelconque
   c) remplacer un C par un B dans une chaîne

Parmi les chaînes suivantes, lesquelles sont des théorèmes ? Donnez les preuves.
DC, DCCC, DCCA, AAADAAA, AAADAAAA, AAADCCCABBA.

5. Définissez un système formel de telle sorte que l'on puisse produire les théorèmes ca, caba, cababa, cababababa, etc. à partir de l'axiome c.

6. Définissez un système formel dont les théorèmes sont toutes les chaînes composées de a et de b qui ne contiennent qu'un seul b.

Série de Travaux dirigés N°2 : La logique propositionnelle

1. Etablir les tables de vérité des formules suivantes, et dites celles qui sont valides, vérifiables et invérifiables :
   1. $(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow (\neg P \vee R)$
   2. $P \wedge (Q \rightarrow P) \rightarrow P$
   3. $(P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q$
   4. $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$

2. Démontrer que :
   1. $A \leftrightarrow A$

3. Etablir les déductions suivantes :
   1. $A \vdash A \vee B$
   2. $A \rightarrow (B \rightarrow C), A \wedge B \vdash C$
   3. $B \wedge A \vdash A \wedge B$
   4. $A, B, B \rightarrow C, A \wedge C \rightarrow E \vdash E$
   5. $E, E \rightarrow (A \wedge D), D \vee F \rightarrow G \vdash G$

4. Trouver les formes normales disjonctives :
   1. $((A \vee B \vee C) \wedge (C \vee \neg A)$
   2. $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$
   3. $\neg((A \vee B) \rightarrow C)$

5. Trouver les formes normales conjonctives :
   1. $(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$
   2. $(A \vee (\neg B \wedge (C \vee (\neg D \wedge E))))$
   3. $A \leftrightarrow (B \wedge \neg C)$

6. Soit A la formule : $(((P \wedge Q) \rightarrow R) \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow R)$
   a) Trouver la Forme Normale Conjonctive de A
   b) Que peut-on déduire de manière plus générale ?
   c) Utiliser le théorème de la déduction pour démontrer cette formule ?

7. En pratique, pour avoir des déductions courtes, on utilise des règles d'inférence dérivées. Chacune de ces règles peut être prouvée en utilisant uniquement les règles d'inférence « primitives » et les axiomes. Parmi ces règles, on donne :
a) Déduire $(P \vee \neg P)$ en utilisant la règle dérivée : $\vdash A \rightarrow B$ et $\vdash \neg A \rightarrow B$ alors B.

b) Déduire en utilisant la règle dérivée appelée *modus-tollens* : $\vdash A \rightarrow B$ et $\vdash \neg B$ alors $\neg A$ que :

$\neg B, A \rightarrow B, C \rightarrow A, \neg C \rightarrow E \vdash E$
$C \rightarrow E, A \rightarrow B, B \rightarrow C, \neg E \vdash \neg A$

? Sol. Ex. 7
$\vdash P \vee \neg P$
(a) $\vdash (P \rightarrow P \vee \neg P)$ sh v a
$\vdash (\neg P \rightarrow P \vee \neg P)$ sh v b
$\vdash (P \rightarrow P \vee \neg P)$ et $\vdash (\neg P \rightarrow P \vee \neg P)$ alors $\vdash P \vee \neg P$
(b) $\vdash \neg B$ et $\vdash A \rightarrow B$ alors $\vdash \neg A$ tol
$\vdash \neg A$ et $\vdash C \rightarrow A$ alors $\vdash \neg C$ tol
$\vdash \neg C \rightarrow E$ et $\vdash E$ MP

$\dfrac{\vdash C \rightarrow E, \vdash \neg E}{\vdash \neg C}$ tol

$\dfrac{\vdash B \rightarrow C, \vdash \neg C}{\vdash \neg B}$ tol

$\dfrac{\vdash A \rightarrow B, \vdash \neg B}{\vdash \neg A}$ tol.

(a)
$\vdash P \rightarrow P \vee \neg P$ sh 6 a
$\vdash \neg P \rightarrow P \vee \neg P$ sh 6 b
$\vdash P \vee \neg P$

$\dfrac{\vdash A \rightarrow B, \vdash A}{\vdash B}$ mp

Abidet-Bahi H.

Série n°3 de travaux dirigés
La logique des prédicats

Exercice n°1 : Traduire les phrases suivantes en langage des prédicats

a) Ali n'a pas de voiture.
b) Si Ali fait trop d'effort en sport, il sera fatigué et ne pourra pas faire ses devoirs.
c) Si Omar est un plombier, Omar est riche
d) Tous les hommes sont plombiers ou riches
e) Les algérois et les oranais sont accueillants.
f) Tous les habitants de Rome ont visité le panthéon.
g) Certains enfants regardent la télévision
h) Tous les hommes se respectent

Exercice n°2 : Démontrer que

a) $p(a), \forall x\ (p(x) \rightarrow q(x)) \vdash q(a)$
b) $p(a) \rightarrow q(b), \forall x\ p(x) \vdash \exists x\ q(x)$
c) $\forall x\ (p(x) \rightarrow q(x), \forall x\ p(x) \vdash \exists\ x\ q(x)$
d) $\forall x\ (p(x) \rightarrow q(x)), \forall x\ p(x) \vdash \forall x\ q(x)$
e) $\forall x\ \exists y\ p(x,y), \forall x\ \forall y\ (p(x,y) \rightarrow q(x)) \vdash \forall z\ q(z)$

Exercice n°3 : Construire la table de vérité des formules suivantes sur le domaine $\{1,2\}$:

a) $\forall x\ p(x) \rightarrow \exists x\ q(x)$
b) $(\exists x)p(x) \wedge q(x)$

Schémas d'axiomes de la Logique des prédicats

1a. $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$
1b. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r))$
1c. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
1d. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$
2. $p \rightarrow (q \rightarrow p \wedge q)$
3a. $p \wedge q \rightarrow p$
3b. $p \wedge q \rightarrow q$
4a. $p \rightarrow p \vee q$
4b. $p \rightarrow p \vee q$
5. $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r)) \rightarrow (p \vee q) \rightarrow r))$
6. $p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$
7. $p \rightarrow p$
8. $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
9. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$