Logique mathimatique :

chapitre 1 : Les systèmes formels.

1) Introduction : la logique formel ce propose délaborer une theorié des raisonnements valides (طريقة التفكير العلمي) raisonnements purement syntascique et non sémantique

التركيب صحيح والمعنى خاطئ مثل صنع الاخضر يشرب.

les elements du discours sur lesquels porte le raisonnements peuvre et arbitrairement subistitués par d'autre sont modifier la validité de raisonnement.

exemple : « Les hommes sont mortels, Socrate est un homme, Donc Socrate est mortel ».

les mots homme mortel est socrate sont subistituable par les symbole : le raisonnement réstera valide.

le modele abstraité de ce raisonnement est :

« si tout x et y, Si z est x Alors z est y »

x, y, z = variable symbole substituable,

si, alors = opérateurs, symbole non substituable.

2) présentation inforelle : vers des 1920 la mathimaticien Emile Post à définer un systeme formel, comme étanté composéz de

* un alphabet (un ensomble de symbole)
* des mots de deparé au axiomes بديهية (formé de chaine de symbole)
* des regles de dérivation (production de nouveau mot)

exemple : Le système p-q

Alphabet = P, q et /

Asciome : pq

Règles de derivation

a) Ajouter / au debut et à la fin d'une chaine

b) Ajouter / aprés p et à la fin de la chaîne

Définition 1 : On appelle dérivation une séquence fini dappellication de regle de production a partie d'un mot donnée. On dira qu'un mot a est dérivable d'un mot b s'il esciste une dérivation a partie de b qui produire.

Définition 2 : on appelle théorème un mot qu'on peut dériver a partir des asciomes.

une preuve d'un théoreme T est une dérivation de T a partir de Théoreme

3) Définition formelle : une Théoreme formelle T est un quadrup
⟨S, W, A, R⟩ où : - S est un ensemble fini ou dénombrable de symbole.

une séquence fini du symbole de S est appelle une espretion du T

* W est un sous ensemble des esprétion de S appellé l'ensemble des formules bien formée (fbf).

* A est un sous ensemble de W appéllé ensemble des asciome de T

* R est un ensemble de relation $\{r_1, r_2, r_3 \ldots r_n\}$ entrée les fbf appellé regle d'infironce.

si $(w_1, w_2, \ldots w_k, w) \in R$ alors w est appellé conséquence directe

escemple : $S = \{M.I.U\}$

$W = \{$ toutes les expressions possibles avec M, I et U $\}$

$A = \{MI\}$

$R = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$

(x, y, sont des expression de MIU)

$r_1 : xI \rightarrow xIU$

$r_2 : Mx \rightarrow Mxx$

$r_3 : xIII \rightarrow xUy$.

$r_4 : xUUy \rightarrow xy$.

définition 4 : une forme w est une conséquence direct dans T d'un ensemble G de formule

$\langle w_1, w_2 \ldots w_n\rangle$ Tel que : - $w = w_n$

- $\forall i = 1\,n$ on a.

- soit w_i est un asciome
- soit $w_i \in G$
- soit w_i est une conséquence directe

par un règle r_j d'un sous ensemble de $\langle w_1 \ldots w_i\rangle$ $\langle w_1 \ldots w_{i-1}\rangle$

de Tel séquence est une preuve de w.

Notation : $G \vdash_T W$

si $\phi \vdash_T W$ on note $\vdash_T W$ et on dit que W est un théorème

exemple : soit la demonstration de MIUIUIU et MUI dans le système MIU.

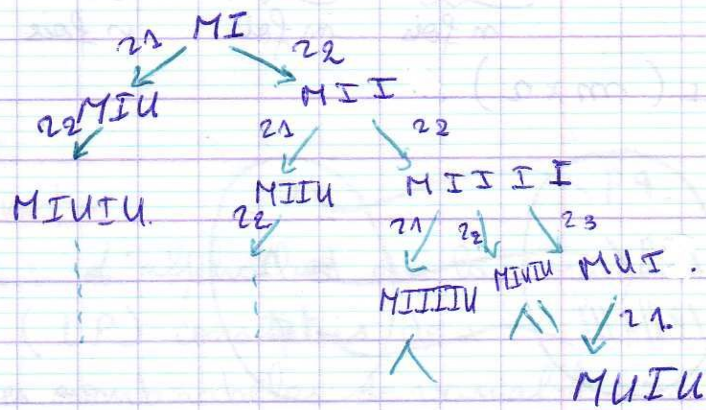
⊢ MI

⊢ MII r2

⊢ MIIII r2

⊢ MIU r3

* MUIU ?



Interpretation : une Interpretation consiste à doné un sens au chaine d'un systeme.
pour se là, il faut choisir un domaine d'interpretation et associer une valeure des domaine.

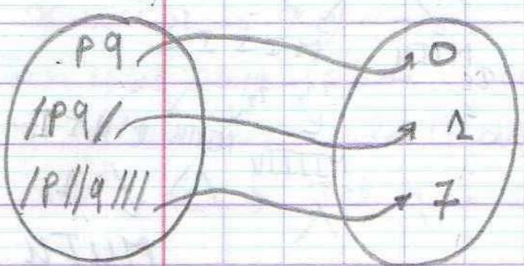
en défini une Interpritation d'un système formel comme étant composé :

- un domaine sémontique :
- une fonction d'interpritation qui associe à chaque mot de système formel un objecte des domaine sémontique

a) Interpritation du système p-q :

en enterpret dans le domaine de nombre rationnels la chaine $\underbrace{//..//}_{n \text{ fois}}\ p\ \underbrace{//..//}_{m \text{ fois}}\ q\ \underbrace{//..//}_{r \text{ fois}}$ comme le nombre

$n + (m \times r)$.



b) Interprétation logique : en interprete la chaine comme l'égalité : $n + m = r$.

$I\ (//p///r///) = 2 + 3 = 3 \to$ faux

$I\ (/p//\ r///) = 1 + 2 = 3 \to$ vrai

chapitre II

1) Introduction

La logique propositionnelle :

dans le cadre de la logique classique, une proposition est un énoncé déclaratif auquel nous pouvons assigner la valeure "vrai" "faux" : ce la logique propositionnelle.

dans le cadre de la logique de approché de résolutio son possible :

1ère est une approche déductive appellé théorie de la preuve.

2ème est une approche sémantique appellé théorie des modèles.

2) Langage :

2.1 L'alphabet :

Définition : 1 : L'alphabet de la logique propositionnelle (LP) constitue de :

un ensemble des nombrabeles de variable propositione (ou formule atomique ou atome).

* une propositione atomique est un énoncé indicomposable

ex : il pleut, la route est mouille, ... مبلولة

abstraitement : $p, q, \ldots, P_1, P_2 \ldots$

- les conecteurs : $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

1) : <u>Négation</u> : $\neg p$ (non p).
2) : <u>conjonction</u> : $p \wedge q$ (p <u>et</u> q)
3) : <u>Disjonction</u> : $p \vee q$ (p <u>ou</u> q)
4) : <u>Implication</u> : $p \rightarrow q$ (<u>si</u> p <u>alors</u> q)
5) : <u>Equivalence</u> : $p \leftrightarrow q$ (p si et seulement si q).
<u>les séparateurs</u> : les parenthèses (et)

2.2 : formules bien formée :

Définition 2 : l'ensemble de formules bien formée (fbf) de la logique propositionnelle est construit de l'alphabet tellque : si p et q sont des fbf alors :

- $\neg p$ est une fbf
- $p \wedge q$ " " "
- $p \vee q$ " " "
- $p \rightarrow q$ " " "
- $p \leftrightarrow q$ " " "

pour evité les ambiguite et minisé l'emploit du ( ) on introduit une priorité entre les connecteurs qui concider avec l'ordre décroissant de leurs enumeration.

<u>EX</u> : fbf

3- Théorie de la preuve :

La Théorie de la preuve ou la méthode desductive permet de décidé si une fbf un théoreme ou non : un axiome est une fbf posé comme un theoreme sont demonstration, un théoreme est une fbf demontrable à partie des axiomes on utilisent les regles d'inference.

1- Les axiomes :

Ils sont obtenu à partir les ~~shémas~~ d'axiome svt on replacent, p, q et r par n'apporte qu'elle fbf.

1a - $p \to (q \to p)$

1b - $(p \to q) \to ((p \to (q \to r)) \to (p \to r))$.

2 - $p \to (q \to p \wedge q)$.

3a - $p \wedge q \to p$.

3b - $p \wedge q \to q$

4a - $p \to p \vee q$

4b - $q \to p \vee q$

5 - $(p \to r) \to ((q \to r) \to (p \vee q) \to c)$

6 - $(p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)$

7 - $\neg\neg p \to p$

8 - $(p \to q) \to ((q \to p) \to (p \leftrightarrow q))$

1c - $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

1d) - $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

9a - $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
9b - $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

3-2 Règle d'inferonce :

dans la logique propositionnelle il y a seul regle d'inference appellé modus-ponens.

si $\vdash p$

et si $\vdash p \rightarrow q$

alors on conclut $\vdash q$

$$\frac{\vdash p,\ \vdash p \rightarrow q}{\vdash q}$$

3-3. Nation de demonstration

une fbf q est un theorieme siselment si il excis une démonstration dant le dernier formul p.q.
la Nation de démonstration peut être étondu a u démonstration a partire des epothèse

exemple :

demontrer que : $\overset{?}{\vdash}$ $a \rightarrow a$ est une theoreme

$\vdash (\underset{p}{a} \rightarrow (\underset{q}{a} \rightarrow a)) \rightarrow ((\underset{p}{a} \rightarrow ((\underset{q}{a} \rightarrow a) \rightarrow \underset{r}{a})) \rightarrow (\underset{p}{a} \rightarrow \underset{r}{a})$ sh1

$\vdash \underset{p}{a} \rightarrow (\underset{q}{a} \rightarrow \underset{p}{a})$ sh1 a

$\vdash (a \rightarrow ((a \rightarrow a) \rightarrow a)) \rightarrow (a \rightarrow a)$ mp 1 2

$\vdash a \rightarrow ((a \rightarrow a) \rightarrow a)$ sh1 a

$\vdash a \to a$ mp 3.4

$* \; a \to (b \to c), b \vdash a \to c$

1) $\Gamma \vdash a \to (b \to c)$ hyp

2) $\Gamma \vdash b$ hyp

3) $\vdash (a \to b) \to ((a \to (b \to c)) \to (a \to c))$ sh 1 b | p : a, q : b, 2 : c

4) $\vdash b \to (a \to b)$ sh 1 a | p : b, q : a

5) $\Gamma \vdash a \to b$ mp 2.4

6) $\Gamma \vdash (a \to (b \to c)) \to (a \to c)$ mp 3.5

7) $\Gamma \vdash a \to c$ mp 1.6.

3.4 Théorème de la déduction :

soit E un ensemble de fbf et q, p deux fbf.

si $E, p \vdash q$
alors $E \vdash p \to q$.

$$\frac{E, p \vdash q}{E \vdash p \to q}$$

$h_1, h_2 \ldots h_n \vdash f$

$h_1, h_2 \ldots h_{n-1} \vdash h_n \to f$

exemple : $a \to (b \to c), b \vdash a \to c$

$a \to (b \to c), b \overset{?}{\vdash} a \to c$

revient à démontrer.

$a \to (b \to c), b, a \vdash c$

$\Gamma \vdash a \to (b \to c)$ hyp

$\Gamma \vdash b$ "

$\Gamma + \{a\} \vdash a$ hyp

$\Gamma + \{a\} \vdash b \to c$ mp 1.3

$\Gamma + \{a\} \vdash c$ mp 2.4

$\Gamma \vdash a \to c$ th. ded 5

4- Théorie des modéles :

la théorie des modéles ou la methode symantique fait appelle a la notion dinterpretation.

l'interprétation de fbf parmet de lui afecter ~~vrai~~ une valeure de verité vrai ou faux.

Pour une formul à la logique propositionnelle cela consiste a afecter des valeurs de verité a chaqu'un des atomes des la formules, et à evalué l'ensemble de la formule en fonction des Tables de verité.

4.1 : Notion d'interprétation, notion de modèle :

Définition : une interprétation $\mathcal{I}$ est une application de l'ensemble de variable propositionnel dans l'ensemble des valeurs de verité $\{v. f\}$.

une formule qui contient N atome aura 2^N interpretation en peut noté une interpretation $\mathcal{I}$ de fbf A qui a N Composont par $\mathcal{I} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ où v_i represent un atome ou sa negation un interpretation donnée I peut être étendu a l'ensemble du formule par :

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	F	V	V~~F~~	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F~~V~~	V	V

exemple : $p \vee (q \rightarrow r)$.

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \vee (q \rightarrow r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	V
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	V	V
F	F	F	V	V

I_5 exemple :

Définition : lorsque une interpretation I viferver une fbf F On dit que I est un modèle de la formule F

exemples :

$I_5 = \{\neg P, q, r\} = V$ est un modèle de la formule

Définition : une formule a et conséquence logique de $A_1, A_2, \ldots, A_n \models A$ ssi tout modele de $A_1, A_2 \ldots A_m$ est un modèle de A.

4. 2. Notion de validité :

Définition : une fbf est dit valide ssi elle est vrais pour tout les interpretation indépondament de la valeure de verité des atomes qu'il a compose.

Définition : une fbf est dit verifiable si il existe au moin une interpretation pour la quelle la formule est vrais.

Définition : une fbf est dit inverifiable ssi elle est faux pour tout ces interpretation.

5- Equivalence de deux formule et formes normales :

deux fbf, P et q sont dit equivalence ssi les valeurs de verité de P et q sont les même peut tout interpretation de P et q

On a la fois $P \models q$ et $q \models P$.

donc on a : $P \equiv q$ (P equi q)

Théorème : pour tout formules p, q et r les paires de formule suivante sont equivalente.

Idempotence : $p \vee p \equiv p$, $p \wedge p \equiv p$

commutativité : $p \vee q \equiv q \vee p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

Associativité : $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$.

$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$.

Absorption : $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

Distributivité : $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

complementarité : $\neg\neg p \equiv p$

Loi de Morgan : $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Tautologie : $v \vee p \equiv v$

$v \wedge p \equiv p$

Inverifalitite $f \vee p \equiv p$

$f \wedge p \equiv f$.

$F = (a \vee \neg(b \wedge a)) \wedge (c \vee (d \vee c))$.

Déf : un litteral est un atome ou la negation d'un a

Déf : une formule est dit sous forme normale conjonction (FN

ssi c'est une conjonction de disjonction de littereau.

Déf : une formule est dite sous forme normele disjonctive (FND) ssi c'est une Disjonction de conjonction de litterau

Theoreme : pour tout Formule de calcule propositionnelle On peut trouvé au moin une formule equivalence ce forme Normel conjonctive au ce forme Normel disjonctive.

La procedure de transformation consiste a :

utilise les lois $\leftrightarrow$ puis $\rightarrow$ en utilisee les lois $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q.$$

2) Reduire la porté de la negation en utilisant les lois de morgan et de complimentarité.

3) Utilisé les lois de distribitivité et des equivalences entre formule :

exemple : trouvée la FNC de la formule :

$\neg ((a \wedge b) \vee (c \wedge \neg d)) \equiv$

$\neg (a \wedge b) \vee \neg (c \wedge \neg d) \equiv$

$(\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge \neg\neg d) \equiv$

$(\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge d) \equiv FNC$

6- Equivalence entre les deux approches.

1 Sûreté de la logique propositionnelle :

La logique propositionnelle est sûre on dit aussi correcte c'est a dire si une formule est dimontrable alors elle est valide. si $\vdash E$, alors $\models E$.

2) complitude de la logique propositionnelle :

La logique propositionnelle est la comp lite c'est a dire si une formule est valide alors c'est un théorème

si $\models E$ alors $\vdash E$

3) Décidabilité de la logique propositionnelle :

La logique propositionnelle est décidable. c'est a dire il esciste un Algorithme qui permet de disside en un nbr fini de pas pour tout formule d'entré si cette formule est ou né pas un théorème.

a) La cohérence de la logique propositionnelle :

La logique propositionnelle est cohérent c'est a dire on ne peut pas diduire à la foi la formule E et la formule non E

Chapitre 3 : LPr : رمزها

La logique des prédicats du premier ordre :

1) Introduction :

La logique des prédicats a pour but le généralisé les proposition.

On peut considère un prédicat comme un énoncé où à parse des variables.

exemple : L'amphi x et grand

si X est le père de y et de Z alors y et Z sont frères

si on remplace tout les variables d'un prédicats par des valeurs défini on obtein un proposition à laquelle on peut associe une entèrpritation (vrais ou faux)

ainsi dans le 1ère exemple pour X = A 12 on obtein L'amphi A2 est grand ; un prédicat represent d'ans potentiellement une classe de proposition.

par l'introduction de quantificateurs on peut representé le fi can monse et vrais pour tout les valeurs possible des variable ou qu'il exciste au moin une valeur des variable qui rans les noncé vrais.

2) Language

2_1 L'alphabit : l'alphabit de la LP2 est consitué de :

* un ensemble de symbole de Prédicat : à 0, 1 ou + ieurs argument notée p, q, r.
* un ensemble de variable d'object : x, y, z, x_1, y_1, ...
* " " de fonction : à 0, 1, + ieurs argument notée f, g.
* Les connecteurs $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ et les ( )
* Les quantificateur : $\forall, \exists$

exemple : traduire en logique Prédicat les phrase suivants

* Omar travaille au la mairie : travailler (OMAR, MAIRIE)
* Tout les chats sont noirs : $\forall x\,(chat(x) \rightarrow noir(x))$
* Certains chats sont noirs : $\exists x\,(chat(x) \wedge noir(x))$
* Aucun chat n'est noir : $\forall x\,(chat(x) \rightarrow \neg noir(x))$
* Si x et le père de y et de z alors y et z sont frères :

$\forall x \forall y \forall z\,(père(x, y) \wedge père(x, z) \rightarrow frère(y, z))$.

2.2. Definitions :

Terme : un Terme est défini telque :

- tout variable est un Terme.
- si f est une fonction a n argument et $t_1, t_2 .. t_n$ sont des Termes alors : $f(t_1, t_2 --- t_n)$ est un Terme.

Formule atomique :

si p est un Prédicat a n argument et $t_1, t_2 t_3 ... t_m$

des Termes alors: $P(t_1, t_2 \ldots t_n)$ est un Formule atomique.

3) Formule bien formée (fbf)

une Formule atomique est une FbF si P, q sont des FbF et x est variable alors: $\neg P$. $P \wedge q$. $P \vee q$, $P \rightarrow q$, $P \leftrightarrow P$ $\forall x$, P et $\exists x P$ sont FbF.

La préorités entre les conecteurs et la même dans la logique propositionnelle.

les quantificateur $\forall$ et $\exists$ ont la meme préorités que le non.

2.3 Portée d'un quantificateur.

une variable et liée dans une formule ssi elle est dans la portée d'un quantificateur.

une variable qui n'est pas liée dans une formule et dit libre.

exemples:

$P(x) \vee \forall x\, q(x)$, dans cette formule x et libre dans P et liée dans q.

- une FbF est dit fermer si un contient pas de variable libre, si non elle dit ouverte.

la farmeture d'une FbF E est difini comme la FbF fermer optenue à partie de E, on la prifixone de quantificateur universelle pourtante sur les variable libre de E.

exemple :

$\exists z P(xz) \rightarrow \forall x \exists y q(x.y.z)$

$\forall x \forall z (\exists z p(x.z)) \rightarrow \forall x \exists y q(x.y.z))$

2.4. Substitution et instantiation :

L'operation substitution : consiste a remplace certaine variable libre d'une formule libre par des therme

si F est une formule où $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ sont les variable libre et σ la substitution

$(t_1/x_1, t_2/x_2 \ldots t_n/x_n)$

$F\sigma$ denote la formule obtenu le remplaçant tout les ocurences de x_1 dans F par t_i $(i = \overline{1,n})$

exemple :

$F = q(x_1.y_1) \leftrightarrow \forall x_2 (r(x_2, z_1) \vee s(x_2, y_1))$

$\sigma = (z_8/x_1, g(a.b)/y_1)$

$F\sigma = q(z_8, g(a.b)) \leftrightarrow \forall x_2 (r(x_2, z_1) \vee s(x_2, g(a.b)))$

* On dit que l'une substitution instancie x si elle remplace x par un therme où n'apparaît aucune variable.

ainsi la substitution σ instancie y_1 mais pas x_1

Rq :

3- Méthode déductive théorie de la preuve :

3.1. Les axiomes :

Nous gardons les schéma d'axiome de la logique propositionnelle auxquels on rajoute :

- Le shéma universel : $\forall x p(x) \rightarrow p(a)$
- Le shéma existentiel : $p(a) \rightarrow \exists x p(x)$.

3.2. Les règles d'inférence

- Les modus pones : $p, p \rightarrow q \vdash q$
- Le théorème de la déduction si $E, p \vdash q$ alors $E \vdash p \rightarrow q$
- La règle universelle : $\dfrac{\vdash C \rightarrow A(x)}{\vdash C \rightarrow \forall x A(x)}$ si C ne contient d'occurence libre de X.
- La règle existentielle : $\dfrac{\vdash A(x) \rightarrow C}{\vdash \exists x A(x) \rightarrow C}$

exemple :

$\forall y(r \rightarrow p(y)) \vdash r \rightarrow \forall x p(x)$.

1- $\Gamma \vdash \forall y(r \rightarrow p(y))$ hyp.

2- $\Gamma \vdash \forall y(r \rightarrow p(y)) \rightarrow (r \rightarrow p(x))$ $\quad \forall x p(x) \rightarrow p(a)$

3- $\Gamma \vdash r \rightarrow p(x)$ m.p 1.2.

4- $\Gamma \vdash r \rightarrow \forall x P(x)$ regle $\forall_3$

4_ Méthode sémantique Théorie des modèles :

4.1. Notion d'interpretation :

dans la logique du 1^er^ ordre une interprétation $\mathcal{I}$ est défini par :

- un ensemble non_vide $\mathcal{D}$ qui est le domaine d'interpretat
- une correspondance entre les constantes et les éléments de D
- une correspondance entre chaque fonction n_aire et une application de $D^n \to D$
- une correspondance entre chaque prédicat n_aire est une application de $D^n \to \{v, f\}$

a) Interpretation des variables :

à chaque variable on fait correspondre un elt de $\mathcal{D}$

b) Interpretation des Termes :

_ La variable sont interpréte comme ci_dessus à chaque constant on fait correspondre un elt de $\mathcal{D}$

_ Si $t'_1, t'_2, \ldots t'_n$ sont les interpretation des Termes $t_1, t_2, \ldots t_n$ et f' est l'interpretation de f alors : l'elt $f'(t'_1, t'_2, \ldots t'_n)$ de D est l'interpretation du Terme $f(t_1, t_2, \ldots t_n)$.

c) Interpretation des formules dans $\{v, f\}$:

si la formule $p(t_1, t_2, \ldots t_n)$ est un atôme sa valeur de vérité est celle de $\bar{p}(t'_1, t'_2, \ldots t'_n)$ où $\bar{p}$ est l'application associé à p et t'_i est l'interprétation de t_i

_ si la formule est de la forme $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$ alors la valeur de la vérité du formule est donnée par la table de vérité ~~du formule~~ de different connecteur.

_ si la formule est de la ~~façon~~ forme $\exists x p$; la valeur de vérité de cette formule est vrais s'il exist un elt de D telque p est vrais à condition de remplacer la variable x par d dans les autres cas la valeur de vérité est faux.

_ Si la formule est de la forme: $\forall x p$ la valeur de vérité de cette formule est vrais si pour tout elt de D. p à la valeur vrais à condition de remplacer x par d sinon la valeur de vérité est fause.

* contrairement à la logique propositionnelle il y a en générale un nombre infinie d'interpretation pour une formule de la logique des predicats.
il n'y a pas donc d'equivalent à la notione de Table de vérité.

Exemple :

$F = \forall x\,(\exists y\ \phi(y) \rightarrow p(x)) \vee p(x)$ avec $D = \{1, 2\}$.

x est libre

x	P_1	P_2	P_3	P_4
1	V	V	F	F
2	V	F	V	F.

P	x	$\forall x\,(\exists y\ P(y) \rightarrow P(x)) \vee P(x)$
P_1	1	v :
P_1	2	
P_2	1	
P_2	2	
P_3	1	f :
P_3	2	
P_4	1	
P_4	2	v :

$$\forall x \begin{cases} \underset{v}{x=1}\ \underset{v}{\exists y} \begin{cases} \underset{v}{y=1} & P_1(1) \\ \underset{v}{y=2} & P_1(2) \end{cases} \rightarrow \underset{v}{P_1(1)} \\ \underset{v}{x=2}\ \underset{v}{\exists y} \begin{cases} y=1 & P_1(1) \\ y=2 & P_1(2) \end{cases} \rightarrow \underset{v}{P_1(2)}. \end{cases} \quad \underset{v}{\vee P_1(1)}$$

$$\forall x \begin{cases} \underset{f}{x=1}\ \underset{v}{\exists y} \begin{cases} x=1 & \underset{f}{P_3(1)} \\ x=2 & \underset{v}{P_3(2)} \end{cases} \rightarrow \underset{f}{P_3(1)} \\ x=2\ \exists y \begin{cases} x=1 & P_3(1) \\ x=2 & P_3(2) \end{cases} \rightarrow P_3(2) \end{cases} \quad \underset{f}{\vee P_3(1)}$$

$$\forall x \begin{cases} \underset{v}{x=1}\ \underset{f}{\exists y} \begin{cases} \underset{f}{y=1} & P_4(1) \\ \underset{f}{y=2} & P_4(2) \end{cases} \rightarrow \underset{f}{P_4(1)} \\ \underset{v}{x=2}\ \underset{f}{\exists y} \begin{cases} \underset{f}{y=1} & P_4(1) \\ \underset{f}{y=2} & P_4(2) \end{cases} \rightarrow \underset{f}{P_4(2)}. \end{cases} \quad \vee P_4(2)$$

4.2 : Notion de validité notion de modèle

soit F une fbf fermée $S = \{P_1, P_2, \ldots P_n\}$ l'ensemble de fbf fermée

Définition : f est vérifiable ssi il existe une interpretation J telque la valeur de verité de f relativement de I est vrais si f est vrais pour l'interpretation J alors J est un modele de f
S est verifiable s'il existe une interpretation J qui est un model de chaque Formule de S.

Définition :

f est valide ssi chaque interpretation J pour f verifier f

Définition

f est dit conséquence valide de S pour toute interpretation J : J est un modele de S implique de I, I est un modele de S → I est modele pour F

Théorème : F est une consequence valide de S ssi $S \cup \{\neg F\}$ est invérifiable.

5 - Equivalence entre les 2 approches :

Sûreté et completude : la LP est sûr, $\vdash_p \xrightarrow{} \models_p$ (démontrable → valide) la LP est complète c-à dire si $\models p \leftrightarrow \vdash p$.

Décidabilité : La LP est semidécidable ; car ∃ une procedure de preuve qui permet d'établir qu'une fbf est un théorème (par la proche déductive) p.r les fbf qui ne sont pas des théorème est les procedure ne se Terminent pas.

Chapitre 4 :
calculabilité effective :
Machine de Turing :

Introduction :

un Algorithme pour une procedure effective est un regle mécanique ou une methode automatique ou un pgm pour effectuer une operation mathématique. lorsque l'algorithme est utilisé pour calculer les valeur d'une fonction numerique, la fonction est décrite comme étant effectivement ou algorithmiquement calculable ~~definent~~ divers outils sont proposés pour calculer les fonction dite calculable . En 1936 . Turing propose d'utiliser une machine considéré comme outils de calcule le plus generale.

2- Description de la machine de Turing

2-1 Description intuitive :

La machine du turing est constitue d'un ruban d'entré infini qui peut être parcourus dans les 2 senses. Le ruban est formé de cases, seule un nombre fini de case est occupé par des symboles de l'alphabèt considérer les autres cases sont occupé par le symboles blancs.

La machine de Turing comprend aussi une tête de l'écture et ecriture, La l'écture commence à la 1ère case du ruban l'orsque la machine à sont état initial. la machine lit un seule symbole à la fois fin

(l'écture / ecriture)

2.2 Description formelle : une machine de Turing est définir par un sept_uplet ($Q, \Sigma, A, S, F, B, \delta$) où

- Q : est un ensemble finit d'états
- Σ : est l'alphabet de symbole qu'on peut ecrire sur le ruban.
- A : est l'alphabet d'entrée
- S : est l'état initial.

- $F \subset Q$: est l'ensemble des états finaux.
- B : est le symbole blanc.
- δ : est la fonction de Transition.

Définition : une expression est une séquence fini sur l'ensemble de base (qui contient les étapes).

Exemple : $\{S_0, S_1, \ldots, S_n, q_1, D, G\}$

$E = S_0 \, S_1 \, D \, q_2 \, S_4 \, q_5$

Définition 2 : On appel quadruplet une expression du Type $q_i \, S_j \, S_K \, q_l$

où $q_i \, S_j \, D \, q_l$

où $q_i \, S_j \, G \, q_l$

Definition 3 une machine du Turing est l'ensemble fini de quadruplet dont les couples initiaux sont tous different.

Exemple :

$q_1 \; v \; D \; q_3$

$q_1 \; r \; v_0 \; q_2$

$q_2 \; G \; G \; q_3$

$q_3 \; v \; D \; q_4$

$q_3 \; r \; D \; q_3$

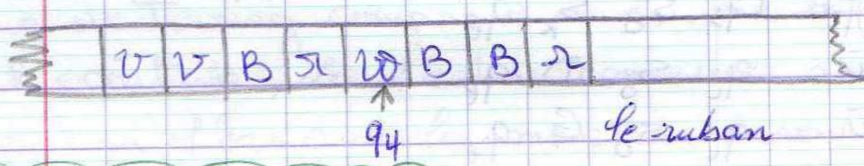
2.3. Description instantanée (DI) :

une Description instantanée est une expression qui :

- ne contient pas d'occurence de D et de G
- Elle contient une seul d'occurence du Type q_i.
- Cette Occurence de q_i ne figure pas à l'esctrémite droite de l'expression.

Dans une DI d'expression instantanée on peut avoir la Totalite des symbole.
L'etat dans lequel setrouve la machine le symbole lu le symbole placé devant l'état

exemple



le ruban

DI = v v B r w q_4 B B r

soit α une DI d'une machine du Turing et B une I de la même machine
le passage de α à B ce fait par aplication des quarduplet qui définisse la machine une DI α est dite Terminal s'il n'esciste DI B tel que B est la DI suivante de α il faut Tojour définir une situatio d'arrét pour une machine du Turing

3- exemple de la machine Turing :

3.1. Lecture / ecriture :

a) construisant la machine de Turing qui On ferme entre 2 marqueurs le mot ecrit sur le ruban avec :

$\Sigma = \{S_0, S_1, S_2, \alpha, B\}$

$A = \{S_1, S_2\}$

$B = S_0$ et le marqueures α et B

$q_0\ S_1\ G\ q_1$ } Le 1^{er} symbole de mot.
$q_0\ S_2\ G\ q_1$

$q_1\ S_0\ \alpha\ q_2$ } Le marqueur de debut

$q_2\ \alpha\ D\ q_3$

$q_3\ S_1\ D\ q_3$ } lecture du mot
$q_3\ S_2\ D\ q_3$

$q_3\ S_0\ B\ q_4$ etat final

⇓ fin du mot.

*B) Ecrire la machine de Turing qu'est facer la 2^{eme} symbole d'un mot ecrire sur le rubane.

$q_0\ S_1\ D\ q_1$) passer au 2^{eme} symbole.
$q_0\ S_2\ D\ q_1$

$q_1\ S_1\ S_0\ q_2$) efacer la 2^{eme} symbole
$q_1\ S_2\ S_0\ q_2$

nous bouclé jamais sur un étape initiale
(répété | $q_0\ s\ q_0 \Rightarrow$ jamais

$\boxed{q_1\ S_0}$

$\boxed{q_2\ S_0}$

* c) écrire la machine de Turing qui :

i) efface le $2^{ème}$ symbole d'un mot si $S_i = S_1$

ii) remplace " " " " par S_1 si $S_i = S_2$

$q_0\ S_1\ D\ q_1$

$q_0\ S_2\ D\ q_1$

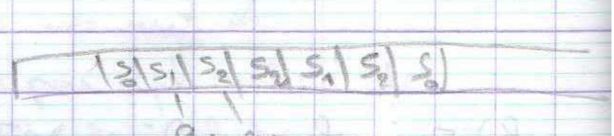
$q_1\ S_1\ S_0\ q_2$

$q_1\ S_2\ S_1\ q_2$

$\boxed{q_1\ S_0}$

$\boxed{\begin{matrix} q_2\ S_0 \\ q_2\ S_1 \end{matrix}}$

3.2 _ Copier un mot :



$q_0\ S_1\ S_0\ q_1$

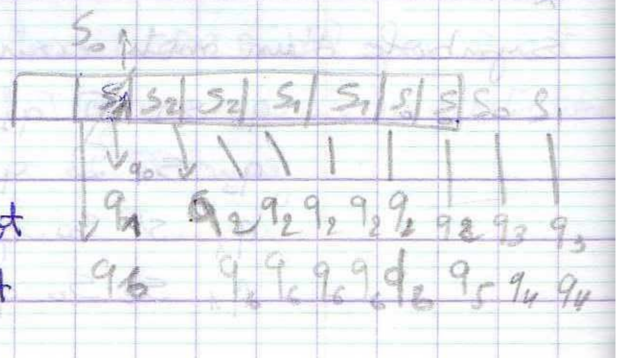
$q_1\ S_0\ D\ q_2$

$q_2 \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} D\ q_2$ lire le 1^{er} mot $\longrightarrow$

$q_2\ S_0\ D\ q_3$) fin du 1^{er} mot

$q_3\ S_0\ S_1\ q_4$) fin du $2^{ème}$ mot

$q_3 \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} D\ q_3$) lire le $2^{ème}$ mot $\Rightarrow$



$q_4 \; S_2 \; G \; q_5$

$q_4 \; S_1 \; G \; q_5$

$q_5 \; S_0 \; G \; q_6$

$q_5 \left(\begin{matrix} S_1 \\ S_2 \end{matrix} \; G \; q_5 \right)$ retourn sur le 2ème mot ←

$\boxed{q_6 \quad S_0}$

$q_6 \left(\begin{matrix} S_1 \\ S_2 \end{matrix} \; G \; q_7 \right)$ retourn de 1ème mot.

$q_7 \left(\begin{matrix} S_1 \\ S_2 \end{matrix} \; G \; q_7 \right)$

$q_7 \; S_0 \; D \; q_0$ debut du 1ème mot

$q_0 \; S_2 \; S_0 \; q_{10}$

$q_{10} \; S_0 \; D \; q_{11}$

$q_{11} \left(\begin{matrix} S_1 \\ S_2 \end{matrix} \; D \; q_{11} \right.$

$q_{11} \; S_0 \; D \; q_{12}$

$q_{12} \; S_0 \; S_2 \; q_4$

$q_{12} \left(\begin{matrix} S_1 \\ S_2 \end{matrix} \; D \; q_{12} \right.$.

$$x + 1 + \underset{B}{1} = y + 1$$

4 : La machine numérique :

4.1 Les conventions :

- On utilise seulement les entiers naturelle.
- l'alphabet de la machine contient seulement deu Symbole $A = \{1, B\}$.
- Tout entier non négatife sera réprésenté par un suite de $n+1$ bâtons ainsi 0 est representé par un bâtons. $0 \to 1$ le 1 representé deux bâtons $1 \to 11$ ...etc.
- le k uplet $(x_1, x_2, \dots x_k) = x_1 B x_2 B \dots B x_k$
- soit M une escprétion sur l'ensemble de base. ecriture M. $\langle M \rangle$ réprésente le nb de bâtons que contient M.

4.2. Un excemple : l'addition :

soit A additioné 2 nbr. sur le ruban.

configuration initiale :

B : Blanc

B	1	1	1	1	B	1	1	B

configuration terminale

B	1	1	1	1	B

$q_0 \mid B\, q_1$

$q_1\, B\, D\, q_2$

$q_2 \mid D\, q_2$

$q_2\, B \mid q_3$

$q_3 \mid D\, q_4$

$q_4 \mid D\, q_4$

$q_4\, B\, G\, q_5$

$q_5 \mid B\, q_6$

$q_6\, B\, G\, q_7$

$q_7 \mid B\, q_8$

4.3 : La soustraction :

soit A ecrire la machine de Turing qui calcule la déference de 2 nbr $x.y$. tell que

$$x - y = \begin{cases} x - y & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

$q_0 \mid B\, q_1$ — face le 1^{ere} bâton de x

$q_1\, B\, D\, q_2$

$q_2 \mid D\, q_2$ — lect x

$q_2\, B\, D\, q_3$

$q_3 \mid D\, q_3$ — lect y.

$q_3\, B\, G\, q_4$

x 1111 B 1111 x

q_2 q_3 q q_4 q_3

q_5

q_4 1 B q_5

q_5 B G q_6

Teste → q_6 1

$\boxed{q_6 \ B}$ y est terminée teste d'arrêt

q_7 1 G q_7

q_7 B G q_8

q_8 1 G q_9

q_9 B D q_0

q_8 B D q_{10} x est terminée avant y.

q_{10} B D q_{11}
q_{11} 1 B q_{10} } on efface le reste de y.

$\boxed{q_{11} \ B}$

BB 1 X 1 1

q_{11} q_{11} q_{11} q_{11}

q_{10} q_{10} q_{10}